西北大学学报(自然科学版)
2013年6月,第43卷第3期,Jun.,2013,Vol.43,No.3
Journal of Northwest University (Natural Science Edition)

一个包含 Smarandache Ceil 函数的对偶函数及 Euler 函数的方程及其可解性

呼家源[1,2],秦 伟[3]

(1.河套学院 理学系,内蒙古 巴彦淖尔 015000;2.西北大学 数学系,陕西 西安 710127;
2.西安文理学院 物理与机械电子工程学院,陕西 西安 710065)

摘要: 对于给定的自然数 n,k,且 $k\geqslant 2$,Smarandache Ceil 函数的对偶函数 $\overline{S}_k(n)$ 定义为 $\overline{S}_k(n)=\max\{x:x\in N:x^k\mid n\}$。文中基于 $\sum_{d\mid n}\overline{S}_k(d)$ 的可乘性并运用初等方法分类讨论研究了方程 $\sum_{d\mid n}\overline{S}_k(d)=\varphi(n)$ 的可解性,证明了该方程有仅有限个正整数解,并给出了该方程的所有正整数解。

关 键 词: Smarandache ceil 函数; Euler 函数; 可解性; 狄利克雷乘积
中图分类号: O156.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-274X(2013)03-0364-03

An equation involving the dual of the Smarandache Ceil function and Euler function and its solvability

HU Jia-yuan[1,2], QIN Wei[3]

(1. Department of Physiology, Hetao College, Bayannur 015000, China;
2. Department of Mathematics, Northwest University, Xi´an 710127, China;
3. Department of Physics and Mechnical & Electrical Engineering, Xi´an University of Arts and Science, Xi´an 710065, China)

Abstract: For any positive integer n,k, and $k\geqslant 2$, the dual of the Smarandache Ceil function is defined as $\overline{S}_k(n)=\max\{x:x\in \mathbf{N}:x^k\mid n\}$. Based on the multipliable property of $\sum_{d\mid n}\overline{S}_k(d)$ and elementary method, in this paper the sovability of the equation $\sum_{d\mid n}\overline{S}_k(d)=\varphi(n)$ is studied, and it is proved that the equation has only finite positive integer solutions.

Key words: Smarandache Ceil function; dual function Euler function; solvability; Direchlet product

1 引言及结论

数论函数一直以来都是数论研究中的一项重要研究课题。近些年,许多学者专注于研究 Smarandache 函数的算术性质,许多有价值的研究成果对数论发展起到了重要的作用。其中 F. Smarandache 教授提出的问题和猜想[1]中给出了著名的 Smarandache Ceil 函数 $S_k(n)$,其定义如下:对于给定的自然数 n,k 且 $k\geqslant 2$,

$$S_k(n)=\min\{x:x\in \mathbf{N}:n\mid x^k\}。$$

关于这一函数的性质,一些学者获得了有意义的研究成果[2-4]。另外,文献[5]定义了各种 Smarandache 函数的对偶函数,其中 $S_k(n)$ 的对偶函数 $\overline{S}_k(n)$ 定义为

$$\overline{S}_k(n)=\max\{x:x\in \mathbf{N}:x^k\mid n\}。$$

容易证明这两个函数都是可乘函数。关于 $\overline{S}_k(n)$ 的一些初等性质,文献[6]也进行了讨论,并给出了一些有趣的结论。

本文利用初等方法研究了一个包含 $\overline{S}_k(n)$ 及

收稿日期:2012-10-20
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10671155)
作者简介:呼家源,女,内蒙古巴彦淖尔人,从事数论研究。

Euler 函数方程的可解性，并给出了该方程的所有正整数解，具体地说即证明了下面的定理。

定理 1　设 n，k 是自然数，且 $k\geqslant 2$，则方程

$$\sum_{d|n}\overline{S}_k(d)=\varphi(n)\qquad(1)$$

的所有正整数解如下：

(I) 当 $k=2$ 或 3 时，方程(1) 有且只有整数解 $n=1,3,8$；

(II) 当 $k\geqslant 4$ 时，方程(1) 有且只有整数解 $n=1,3,8,24$。

2　定理 1 的证明

本节完成定理 1 的证明。

首先，$\overline{S}_k(n)$ 是可乘函数，由可乘函数的性质知 $\sum_{d|n}\overline{S}_k(d)$ 是可乘函数，现在分如下几种情况来证明我们的结论。

(a) 当 $n=1$ 时，对所有的 $k\geqslant 2$，$n=1$ 都满足公式(1)。

(b) 当 $n=p^\alpha$ 时，其中 $1\leqslant\alpha\leqslant k-1$，$p$ 是素数。由函数 $\overline{S}_k(n)$ 的定义，有

$$\sum_{d|p^\alpha}\overline{S}_k(d)=\overline{S}_k(1)+\overline{S}_k(p)+\cdots+\overline{S}_k(p^\alpha)=\alpha+1\qquad(2)$$

及

$$\varphi(p^\alpha)=p^{\alpha-1}(p-1)。\qquad(3)$$

当 $k=2$ 时，由 $1\leqslant\alpha\leqslant k-1$ 知 $\alpha=1$，此时 $\alpha+1=2$。于是由于 $p^{\alpha-1}(p-1)=2$ 当且仅当 $p=3$，所以只有 $n=3$ 是方程(1) 的解。又易证当 $k=2$ 时，对任意的 $p>3$，都有 $\sum_{d|p^\alpha}\overline{S}_k(d)<\varphi(p^\alpha)$。

当 $k=3$ 时，由 $1\leqslant\alpha\leqslant k-1$ 知 $\alpha=1,2$。此时由方程(1) 得 $p-1=2$ 或者 $p(p-1)=3$，这种情况只有 $p=3$，$\alpha=1$ 成立，即只有 $n=3$ 是方程(1) 的解。同样易证，当 $k=3$ 时对任意的 $p>3$ 都有 $\sum_{d|p^\alpha}\overline{S}_k(d)<\varphi(p^\alpha)$。

当 $k\geqslant 4$ 时，因为 $1\leqslant\alpha\leqslant k-1$，所以有 $\alpha=1,2,3,\cdots,k-1$。由方程(1) 得 $p-1=2$，$p(p-1)=3$，$p^2(p-1)=4$，$\cdots$，$p^{k-1}(p-1)=k$，经检验可得 $n=3,2^3$ 是方程(1) 的解，且很容易证明对任意的 $k\geqslant 4$，只要 $n>2^3$ 或 $p>3$ 就有 $\sum_{d|p^\alpha}\overline{S}_k(d)<\varphi(p^\alpha)$。

(c) 当 $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\cdots\cdot p_l^{\alpha_l}$，其中 $1\leqslant\alpha_i\leqslant k-1$，$l\geqslant 2$ 时，由 $\sum_{d|n}\overline{S}_k(d)$ 的可乘性可得

$$\sum_{d|n}\overline{S}_k(d)=\sum_{d|p_1^{\alpha_1}}\overline{S}_k(d)\sum_{d|p_2^{\alpha_2}}\overline{S}_k(d)\cdots\sum_{d|p_l^{\alpha_l}}\overline{S}_k(d)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_l+1),$$

而

$$\varphi(n)=p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)\cdot p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\cdots p_l^{\alpha_l-1}(p_l-1),$$

由(b) 知，若 $k=2$ 或 3，只有 $n=3$ 是 $\sum_{d|p^\alpha}\overline{S}_k(d)=\varphi(p^\alpha)$ 的解，更有当 $p>3$ 时，都有 $\sum_{d|p^\alpha}\overline{S}_k(d)<\varphi(p^\alpha)$，所以经检验 l 只能等于 1，n 只能等于 3。

若 $k\geqslant 4$，$n=3$ 和 $n=2^3$ 都满足 $\sum_{d|p^\alpha}\overline{S}_k(d)=\varphi(p^\alpha)$，而且 $k\geqslant 4$ 时，若 $n>2^3$ 或 $p>3$，有不等式 $\sum_{d|p^\alpha}\overline{S}_k(d)<\varphi(p^\alpha)$，所以经验证 $n=3$，$n=2^3$，$n=3\cdot 2^3=24$ 是方程(1) 的解。

(d) 当 $n=p^\alpha$，$\alpha\geqslant k$，p 是素数时，不妨把 n 写为 $n=p^{k\alpha+\beta}$，其中 $\alpha\geqslant 1$，$0\leqslant\beta<k$，所以

$$\begin{aligned}\sum_{d|p^{k\alpha+\beta}}\overline{S}_k(d)&=\overline{S}_k(1)+\overline{S}_k(p)+\cdots+\overline{S}_k(p^{k-1})+\overline{S}_k(p^k)+\cdots+\overline{S}_k(p^{2k-1})+\\&\quad\overline{S}_k(p^{2k})+\cdots+\overline{S}_k(p^{k(\alpha-1)-1})+\overline{S}_k(p^{k(\alpha-1)})+\cdots+\overline{S}_k(p^{k\alpha-1})+\overline{S}_k(p^{k\alpha})+\\&\quad\overline{S}_k(p^{k\alpha+1})+\cdots+\overline{S}_k(p^{k\alpha+\beta})=\\&\underbrace{1+\cdots+1}_{k}+\underbrace{p+\cdots+p}_{k}+\underbrace{p^2+\cdots+p^2}_{k}+\cdots+\underbrace{p^{\alpha-1}+\cdots+p^{\alpha-1}}_{k}+\underbrace{p^\alpha+\cdots+p^\alpha}_{\beta+1}=\\&k(1+p+\cdots+p^\alpha)+(1+\beta)p^\alpha,\end{aligned}$$

即

$$\sum_{d|p^{k\alpha+\beta}}\overline{S}_k(d)=\frac{k(p^\alpha-1)}{p-1}+(1+\beta)p^\alpha,\qquad(4)$$

而

$$\varphi(p^{k\alpha+\beta})=p^{k\alpha+\beta-1}(p-1)。\qquad(5)$$

在式(4) 及式(5) 的左右同时乘以 $\frac{p-1}{p^\alpha}$，式(4) 右边变为

$$k-\frac{k}{p^\alpha}+(\beta+1)(p-1),\qquad(6)$$

式(5) 右边变为

$$p^{(k+1)\alpha+\beta-1}(p-1)^2,\qquad(7)$$

于是式(4) 与式(5) 相等的解便等价于解方程

$$k-\frac{k}{p^\alpha}+(\beta+1)(p-1)=p^{(k+1)\alpha+\beta-1}(p-1)^2。\qquad(8)$$

当 $k=2$ 时，代入式(8) 得

$$2-\frac{2}{p^\alpha}+(\beta+1)(p-1)=p^{\alpha+\beta-1}(p-1)^2,\qquad(9)$$

所以有 $p=2$，$\alpha=1$，否则左边为分数，右边是整数。

因 $1 \leqslant \beta \leqslant k-1$，有 $\beta = 0$ 或 1。若 $\beta = 0$，代入式(9)左边等于2，右边等于1；若 $\beta = 1$，代入式(9)左边等于3，右边等于2。所以方程无解，且易证当 $k = 2$ 时，对任意的 $p > 2$，有式(8)左边小于右边，即 $\sum_{d \mid p^{k\alpha+\beta}} \overline{S}_k(d) < \varphi(p^{k\alpha+\beta})$。

当 $k = 3$ 时，代入式(8)得

$$3 - \frac{3}{p^{\alpha}} + (\beta+1)(p-1) = p^{2\alpha+\beta-1}(p-1)^2, \tag{10}$$

同理有 $p = 3$，$\alpha = 1$。而 $\beta = 0,1,2$，代入式(9)的右边大于等于12，左边小于等于8，故方程无解，且易证当 $k = 3$ 时，对任意的 $p > 3$ 有式(8)的左边小于右边，即 $\sum_{d \mid p^{k\alpha+\beta}} \overline{S}_k(d) < \varphi(p^{k\alpha+\beta})$。当 $k = 3$ 时，代入式(8)得

$$4 - \frac{4}{p^{\alpha}} + (\beta+1)(p-1) = p^{3\alpha+\beta-1}(p-1)^2, \tag{11}$$

有 $p = 2$，$\alpha = 1$ 或 $p = 2$，$\alpha = 2$，否则左边为分数，右边是整数。而且其中 $\beta = 0,1,2,3$。

(i) 当 $p = 2$，$\alpha = 1$ 时，代入式(8)得 $\beta + 3 = 2^{2+\beta}$。若 $\beta = 0$，上式左边等于3，右边等于4；若 $\beta = 1$，上式左边等于4，右边等于8；若 $\beta = 2$，上式左边等于5，右边等于16；若 $\beta = 3$，上式左边等于6，右边等于32，所以方程无解。

(ii) 当 $p = 2$，$\alpha = 2$ 时，代入式(8)得 $\beta + 4 = 2^{3+\beta}$。若 $\beta = 0$，上式左边等于4，右边等于8；若 $\beta = 1$，上式左边等于5，右边等于16；若 $\beta = 2$，上式左边等于6，右边等于32；若 $\beta = 3$，上式左边等于7，右边等于64，所以方程无解。

而且，当 $k = 4$ 时，对任意的 $p \geqslant 3$，式(8)左边小于右边。因为

$$p^{3\alpha+\beta-1}(p-1)^2 - 4 - \frac{4}{p^{\alpha}} - (\beta+1)(p-1) \geqslant$$
$$p^{3\alpha+\beta-1}(p-1)^2 - (\beta+1)(p-1) - 4 > 0,$$

当 $k \geqslant 5$ 时，对于方程(6)有

$$k - \frac{k}{p^{\alpha}} + (\beta+1)(p-1) < k + (\beta+1)(p-1) \leqslant$$
$$k + + (p-1) = kp。$$

故式(6)除以 p 小于 k，而式(7)除以 p 得 $p^{(k-1)\alpha+\beta-2}(p-1)^2 > k$。事实上，令 $f(k) = p^{(k-1)\alpha+\beta-2}(p-1)^2 - k$，$f'(k) > 0$，所以 $f(k)$ 单调递增。而 $k = 5$ 时，$f(x) > p^{4\alpha-2} - 5 > 0$，所以 $p^{(k-1)\alpha+\beta-2}(p-1)^2 > k$。因此

$$k - \frac{k}{p^{\alpha}} + (\beta+1)(p-1) < kp <$$
$$p^{(k-1)\alpha+\beta-1}(p-1)^2。$$

即式(6)小于式(7)，故式(4)小于式(5)，即

$$\sum_{d \mid p^{k\alpha+\beta}} \overline{S}_k(d) = \frac{k(p^{\alpha}-1)}{p-1} + \beta p^{\alpha} <$$
$$\varphi(p^{k\alpha+\beta}) = p^{k\alpha+\beta-1}(p-1)。$$

综上得，当 $n = p^{\alpha}$，$\alpha \geqslant k$，p 是素数时，方程无解。

(e) 当 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_l^{\alpha_l}$，其中 $\alpha_i \geqslant k(i = 1,2,\cdots,l)$，$p_i$ 是素数，由 $\sum_{d \mid n} \overline{S}_k(d)$ 的可乘性及(d)的讨论知方程(1)无解。

(f) 当 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_l^{\alpha_l} p_{l+1}^{\alpha_{l+1}} p_{l+2}^{\alpha_{l+2}} \cdots p_{l+t}^{\alpha_{l+t}}$ 时，其中 $\alpha_i \geqslant k(i = 1,2,\cdots,l)$，$1 \leqslant \alpha_i < k(l+1 \leqslant i \leqslant l+t)$，$p_i$ 是素数，当 $k \leqslant 4$ 时，由前面讨论，各种情况都加以验证得只有 $n = 1,3,8,24$ 是解；当 $k \geqslant 5$ 时，有 $\sum_{d \mid p^{\alpha_i}} \overline{S}_k(d) < \varphi(p^{\alpha_i})$，$1 \leqslant i \leqslant l+t$，故方程(1)无解。

定理证毕。

参考文献:

[1] SMARANDACHE F. Only Problems [M]. Not Solutions, Chicago, Xiquan Publishing House, 1993.

[2] 易媛，亢小玉. Smarandache 问题的研究 [J]. High American Press, 2005.

[3] LU Ya-ming. On a Dual Function of the Smarandache Ceil Function [M]. Hexis: Research on Smarandache Problems in Number Theory (Vol.2), 2005: 55-58.

[4] LI Xiao-yan. The Mean Value of the k-th Smarandache Dual Function [M]. Hexis: Research on Number Theory and Smarandache Notions, 2009: 128-132.

[5] SANDOR J. On a dual of the Pseudo-Smarandache function [J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13: 18-23.

[6] WANG Yong-xing. Some identities involving the Smarandache ceil function [J]. Scientia Magna, 2006, 2(1): 45-49.

[7] TABIRCA S, TABIRCA T. Some new results concerning the Smarandache Ceil function [J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13: 30-36.

[8] 张文鹏. 初等数论 [M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2007.

[9] APOSTOL T M. Introduction to Analytic Number Theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1976: 32-35.

(编 辑 亢小玉)